Institut Galilée, Université Sorbonne Paris Nord
L1 Analysis 2 Exercises – Spring 2020

Bart Michels
`michels@math.univ-paris13.fr`

Version of March 13, 2020

Odd numbered solutions will be in French, even numbers will be in English. To translate terminology and names of theorems between French and English:

1. On Wikipedia, go to the page of the term you want to translate;
2. Select a different language in the menu bar.

See also Jan Nekovář's introduction to mathematical English:
`https://webusers.imj-prg.fr/~jan.nekovar/co/en/`

Solutions to the exercises will appear here after we have worked on them in class. The first few solutions will be more detailed. After that, the level of detail will converge to what is expected from you on the exams.

Solutions to chapter 1

Exercise 1. Nous allons montrer que ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée. Avec une formule explicite pour la dérivée, on montrera que ψ' n'est pas continue.

Être dérivable sur $\mathbb{R}$ signifie (par définition) être dérivable en chaque point. Soit donc $x_0 \in \mathbb{R}$ quelconque, et montrons que ψ est dérivable en x_0. On distingue 3 cas.

Premier cas: $x_0 < 0$. Parce que ψ est une fonction constante sur $]-\infty, 0[$, elle y est dérivable, de dérivée nulle. Donc ψ est dérivable en x_0, et $\psi'(x_0) = 0$.

Deuxième cas: $x_0 = 0$. On part ici de la définition de dérivabilité. Est-ce que la limite $\lim_{x\to x_0} \frac{\psi(x)-\psi(0)}{x-0}$ existe? On rappelle que pour cela, il faut et il suffit que les limites à gauche et à droite existent, et sont égales (vu dans les TD d'Analyse 1). (Ceci est un critère très utile pour nous, parce que ψ n'est pas définie par une seule expression pour tout $x \in \mathbb{R}$, mais elle *est* donnée par une seule expression si on restreint x à $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$.) Pour la limite à gauche, on trouve:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} \frac{\psi(x)-\psi(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\psi(x)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{0}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^-} 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

(la limite d'une fonction constante vaut cette constante). Pour la limite à droite, nous avons:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{\psi(x)}{x} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2\cos(1/x)}{x}\\ &= \lim_{x\to 0^+} x\cos(1/x)\,,\end{aligned}$$

(où les égalités sont valables à condition qu'une de ces limites existe). Montrons que la dernière limite existe et qu'elle vaut 0. En effet, on a $\lim_{x\to 0^+} x = 0$ et $\cos(1/x)$ est bornée (majorée par 1 et minorée par -1) lorsque $x \in]0,+\infty[$. Il suffit donc de rappeler le résultat suivant: Si $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle, a un point adhérant [1] de I, et $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions tels que:

- $\lim_{x\to a} f(x) = 0$;
- g est bornée,

alors $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$. En mots: le produit d'une fonction qui tend vers 0 et une fonction bornée, tend vers 0. (On peut le démontrer à l'aide du théorème des gendarmes. Esquisse: si $|g|$ est majorée par M, on a $-M\cdot|f(x)| \le |f(x)g(x)| \le M\cdot|f(x)|$. Comme $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, on a aussi $\lim_{x\to a}|f(x)| = 0$, et donc $\lim_{x\to a} -M\cdot|f(x)| = \lim_{x\to a} M\cdot|f(x)| = 0$. Comme $-M\cdot|f| \le |fg| \le M\cdot|f|$, le théorème des gendarmes donne $\lim_{x\to a}|f(x)g(x)| = 0$, et donc $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.) Les limites à gauche et à droite sont égales à 0, donc ψ est dérivable en 0 et $\psi'(0) = 0$.

Troisième cas: $x_0 > 0$. Montrons que ψ est dérivable sur $]0,+\infty[$. La fonction $x \mapsto x^2$ y est bien dérivable. On a que x est dérivable sur $]0,+\infty[$ et non-nulle, donc $1/x$ y est dérivable. On a que $\cos(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc la composée $\cos(1/x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$. Le produit de fonctions dérivables est dérivable, donc $x^2\cos(1/x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$. Pour le calcul de la dérivée, on trouve

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(x^2\cos(1/x)\right) &= \frac{d}{dx}(x^2)\cdot\cos(1/x) + x^2\cdot\frac{d}{dx}\cos(1/x)\\ &= 2x\cos(1/x) + x^2\cdot(-\sin(1/x))\cdot\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\\ &= 2x\cos(1/x) + x^2\cdot(-\sin(1/x))\cdot\frac{-1}{x^2}\\ &= 2x\cos(1/x) + \sin(1/x)\,.\end{aligned}$$

En résumé: ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée

$$\psi'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le 0\,,\\ 2x\cos(1/x) + \sin(1/x) & \text{si } x > 0\,.\end{cases}$$

[1] c'est à dire, un point de I ou une extrémité de I

Montrons maintenant que ψ n'est pas de classe C^1, c'est à dire que ψ' n'est pas continue. On va montrer plus spécifiquement que ψ' n'est pas continue en 0. On a par définition que ψ' est continue en 0 ssi $\lim_{x\to 0}\psi'(x) = \psi'(0)$. D'après la caractérisation séquentielle des limites de fonctions, ça équivaut à que: pour toute suite réelle (u_n) telle que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ on a $\lim_{n\to\infty}\psi'(u_n) = \psi'(0)$.

Pour montrer que ψ' n'est *pas* continue en 0, il suffit donc de donner un example d'une suite (u_n) telle que $u_n \to 0$ et $\psi'(u_n)$ ne tend pas vers $\psi'(0) = 0$. Regardons la formule pour $\psi'(x)$. On voit qu'elle est continue à gauche en 0, donc pour trouver une suite (u_n) on a envie d'en prendre choisir $u_n > 0$. Pour $x > 0$, la formule pour $\psi'(x)$ a deux termes. Le premier tend vers 0 lorsque $x \to 0$, il ne va pas influencer notre choix de (u_n). Le deuxième terme oscille beaucoup quand $x \to 0$. Si on prend pour (u_n) une suite telle que $\sin(1/u_n) = 1$ pour tout n, on aura $\lim_{n\to\infty}\psi'(u_n) = 1$. Définissons donc $u_n = 1/(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)$. Nous avons bien que $u_n \to 0$, car

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\frac{\pi}{2n} + 2\pi} = 0\cdot\frac{1}{2\pi} = 0\,.$$

On espère que $\psi'(u_n) \not\to \psi'(0) = 0$. En effet,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\psi'(u_n) &= \lim_{n\to\infty}\left(2u_n\cos(1/u_n) + \sin(1/u_n)\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} 2u_n\cos(1/u_n) + 1\\ &= 1\end{aligned}$$

(où on a de nouveau utilisé le fait que $u_n \to 0$ et $\cos(1/u_n)$ bornée implique que $u_n\cos(1/u_n) \to 0$). Donc ψ' n'est pas continue en 0.

Remarque. Quand nous avons montré que ψ est dérivable sur $]-\infty, 0[$, et sur $]0, +\infty[$, nous avons utilisé que ψ est donnée par une certaine formule sur ces intervalles. Par exemple, sur $]-\infty, 0[$ nous avons utilsé que la dérivée d'une fonction constante est 0. Mais ψ' n'est pas une fonction constante (sa *restriction* à $]-\infty, 0[$ l'est). Ce qu'on a fait donc, c'est de calculer la dérivée *de la restriction* de ψ à $]-\infty, 0[$ (et pareil pour $]0, +\infty]$). Pour être complet, il faut mentionner (ou s'en convaincre) que la dérivée d'une restriction de ψ à un intervalle ouvert existe, si et seulement si la dérivée de ψ sur cet intervalle ouvert existe, et dans ce cas *la restriction de la dérivée égale la dérivée de la restriction.*

Ou encore: Si $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert, $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction, $x \in I$ et $J \subset I$ un intervalle ouvert contenant x, la dérivée (et la dérivabilité) de f en x ne dépend que des valeurs de f sur J. De plus, $f'(x) = (f|_J)'(x)$.

Ou encore, avec les mêmes notations: les assertions "f est dérivable en tout point de J" et "la restriction de f à J est dérivable" sont équivalentes.

Exercise 2. First, we prove that ϕ' is differentiable on the open interval $]-\infty, 1[$ and compute its derivative on this interval.[2]

As in the previous exercise, we distinguish three cases. We have that ϕ is differentiable on $]-\infty, 0[$, because its restriction to this interval is a constant function. Thus $\phi'(x) = 0$ for $x < 0$.

For differentiability at 0, we have

$$\lim_{x\to 0} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\phi(x) - 1}{x}\,.$$

We will compute the left and right limit, and show that they are equal. The left limit (that is, the limit as $x \to 0$ of the restriction of ϕ to $]-\infty, 0[$) equals

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} \frac{\phi(x) - 1}{x} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{1 - 1}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^-} 0 \\ &= 0\,,\end{aligned}$$

(limit of a constant function). The right limit equals

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{\phi(x) - 1}{x} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{(\sqrt{1-x^2} - 1)\cdot(\sqrt{1-x^2} + 1)}{x\cdot(\sqrt{1-x^2} + 1)} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{(1-x^2) - 1}{x\cdot(\sqrt{1-x^2} + 1)} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2} + 1} \\ &= \frac{0}{2} \\ &= 0\end{aligned}$$

because $\lim_{x\to 0^+} -x = 0$, and because the function $x \mapsto \sqrt{1-x^2} + 1$ is continuous at 0. Thus ϕ is differentiable at 0, with derivative $\phi'(0) = 0$.

Finally, on the interval $]0, 1[$, ϕ is differentiable because it is the composition of differentiable functions: $x \mapsto 1 - x^2$ is differentiable on $]0, 1[$ and its image is contained in $]0, +\infty[$, and $x \mapsto \sqrt{x}$ is differentiable on $]0, +\infty[$. By the chain rule

[2]Even though ϕ is defined at 1, we have no choice but to exclude the point 1, because in Analysis 1 we have never defined differentiability at an endpoint of the interval of definition!

we have for $x \in]0,1[$,

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{d}{dx}(1-x^2) \\ &= \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,.\end{aligned}$$

In summary, ϕ is differentiable on $]-\infty,1[$ with derivative

$$\phi'(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0\,, \\ \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} & \text{if } x \in]0,1[\,. \end{cases}$$

Now let's show that ϕ is not twice differentiable at 0. I.e. that ϕ' is not differentiable at 0. We want to show that the limit $\lim_{x\to 0} \frac{\phi'(x)-\phi'(0)}{x-0}$ does not exist. We'll show that the left and right limit exist, but that they are different. The left limit equals

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} \frac{\phi'(x)}{x} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{0}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^-} 0 \\ &= 0\,.\end{aligned}$$

The right limit equals

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{\phi'(x)}{x} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= 1\,,\end{aligned}$$

by continuity of the function $x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ at 0.

Exercise 3. Pour montrer que h est de classe C^2, on va montrer que h est dérivable, calculer h', montrer que h' est dérivable, calculer h'', et montrer que h'' est continue.

Montrons que h est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sur $]-\infty,0[$, c'est une fonction constante, donc dérivable de dérivée 0. En 0, on a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{0}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^-} 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

d'une part, et

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^+} x^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

d'autre part. Donc h est dérivable en 0, avec $h'(0) = 0$. Sur $]0, +\infty[$, h est une fonction polynomiale, donc dérivable, et $h'(x) = 3x^2$. En résumé,

$$h'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0\,, \\ 3x^2 & \text{si } x > 0\,. \end{cases}$$

Montrons que h' est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sur $]-\infty, 0[$, c'est une fonction constante, donc dérivable et $h''(x) = 0$ pour $x < 0$. En 0, on trouve

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^-} \frac{h'(x) - h'(0)}{x - 0} &= \lim_{x \to 0^-} \frac{0}{x} \\ &= \lim_{x \to 0^-} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'une part, et

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} \frac{h'(x) - h'(0)}{x - 0} &= \lim_{x \to 0^+} \frac{3x^2}{x} \\ &= \lim_{x \to 0^+} 3x \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'autre part. Donc h' est dérivable en 0 et $h''(0) = 0$. Sur $]0, +\infty[$, h' est une fonction polynomiale, donc dérivable, et $h''(x) = 6x$. En résumé,

$$h''(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0\,, \\ 6x & \text{si } x > 0\,. \end{cases}$$

Montrons maintenant que h'' est continue sur $\mathbb{R}$. Sur $]-\infty, 0[$, c'est une fonction constante, donc continue. En 0, nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^-} h''(x) &= \lim_{x \to 0^-} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

(limite d'une fonction constante) d'une part, et

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} h''(x) &= \lim_{x \to 0^+} 6x \\ &= 0 \end{aligned}$$

(continuité de $x \mapsto 6x$ en 0) d'autre part. Comme $0 = h''(0)$, on conclut que h'' est continue en 0. Sur $]0, +\infty[$, h'' est une fonction polynomiale, donc continue. En résumé, h'' est continue sur $\mathbb{R}$ (car continue en tout point de $\mathbb{R}$).

Ensuite, montrons que h n'est pas trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Plus précisément, montrons que h'' n'est pas dérivable en 0. C'est à dire, montrons que la limite

$\lim_{x\to 0} \frac{h''(x)-h''(0)}{x-0}$ n'existe pas. On va montrer que les limites à gauche et à droite existent, mais ne sont pas égales. À gauche, nous avons

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} \frac{h''(x)-h''(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{0}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^-} 0 \\ &= 0\,.\end{aligned}$$

À droite, nous avons

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{h''(x)-h''(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{6x}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^+} 6 \\ &= 6\,.\end{aligned}$$

Ces limites n'étant pas égales, h'' n'est pas dérivable en 0.

Exercise 4. 1. Call $T_1(x)$ the time needed for the lifeguard to walk from M_1 to M, and $T_2(x)$ the time needed to swim from M to M_2. We have $T(x) = T_1(x) + T_2(x)$. From $v_1 = \frac{|MM_1|}{T_1(x)}$ and $v_2 = \frac{|MM_2|}{T_2(x)}$, we find

$$\begin{aligned}T(x) &= \frac{|MM_1|}{v_1} + \frac{|MM_2|}{v_2} \\ &= \frac{\sqrt{(x-a_1)^2+(0-b_1)^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x-a_2)^2+(0-b_2)^2}}{v_2}\,.\end{aligned}$$

2. Recall the following facts:
   (a) If $I \subset \mathbb{R}$ is an open interval, $f : I \to \mathbb{R}$ is differentiable and $x \in I$ is a local minimum or local maximum of f, then $f'(x) = 0$.
   (b) With the same notations, if f is twice differentiable and $x \in I$ is such that $f'(x) = 0$ and $f''(x) > 0$, then x is a local minimum for f.
   (c) Rolle's theorem: If $f : I \to \mathbb{R}$ is differentiable and $a, b \in I$ are such that $a < b$ and $f(a) = f(b) = 0$, then there exists $c \in \,]a, b[$ with $f'(c) = 0$.

   In particular, if f is twice differentiable on I and there are two points $a, b \in I$ which are local maxima or local minima (so that $f'(a) = f'(b) = 0$), then there exists $c \in I$ with $f''(c) = 0$.

   Even if it is not clear at the moment how to use these results to prove that there is a unique minimum for T, we see that the first and second derivatives of T will be important, so we compute them. By the chain rule, we have

$$
\begin{aligned}
T'(x) &= \frac{\frac{d}{dx}(x-a_1)^2}{2v_1\sqrt{(x-a_1)^2+b_1^2}} + \frac{\frac{d}{dx}(x-a_2)^2}{2v_2\sqrt{(x-a_2)^2+b_2^2}} \\
&= \frac{2(x-a_1)}{2v_1\sqrt{(x-a_1)^2+b_1^2}} + \frac{2(x-a_2)}{2v_2\sqrt{(x-a_2)^2+b_2^2}} \\
&= \frac{x-a_1}{v_1\sqrt{(x-a_1)^2+b_1^2}} + \frac{x-a_2}{v_2\sqrt{(x-a_2)^2+b_2^2}} \,. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Note that the expressions under the square roots are always strictly positive, because $(x-a_1)^2+b_1^2 \geq b_1^2 > 0$ and $(x-a_2)^2+b_2^2 \geq b_2^2 > 0$.

Because $T(x) = T_1(x) + T_2(x)$, we have $T''(x) = T_1''(x) + T_2''(x)$. To simplify the formulas, we will compute only $T_1''(x)$; the formula for $T_2''(x)$ is similar, the only difference being that a_1, b_1, v_1 have to be replaced by a_2, b_2, v_2. We have computed $T_1'(x)$ above. By the chain rule and the product rule, differentiating this expression for $T_1'(x)$ again we have

$$
\begin{aligned}
T_1''(x) = {} & \frac{d}{dx}(x-a_1)\cdot\frac{1}{v_1\sqrt{(x-a_1)^2+b_1^2}} \\
& + (x-a_1)\cdot\frac{-1}{2}\frac{1}{v_1((x-a_1)^2+b_1^2)^{3/2}}\cdot\frac{d}{dx}((x-a_1)^2+b_1^2) \\
= {} & \frac{1}{v_1\sqrt{(x-a_1)^2+b_1^2}} \\
& + (x-a_1)\cdot\frac{-1}{2}\frac{1}{v_1((x-a_1)^2+b_1^2)^{3/2}}\cdot 2(x-a_1) \\
= {} & \frac{1}{v_1\sqrt{(x-a_1)^2+b_1^2}} - \frac{(x-a_1)^2}{v_1((x-a_1)^2+b_1^2)^{3/2}} \,,
\end{aligned}
$$

where we have used that $\frac{d}{dx}(x^{-1/2}) = -\frac{1}{2}x^{-3/2}$. Putting these fractions over a common denominator, we have

$$
\begin{aligned}
T_1''(x) &= \frac{(x-a_1)^2+b_1^2}{v_1((x-a_1)^2+b_1^2)^{3/2}} - \frac{(x-a_1)^2}{v_1((x-a_1)^2+b_1^2)^{3/2}} \\
&= \frac{b_1^2}{v_1((x-a_1)^2+b_1^2)^{3/2}} \,.
\end{aligned}
$$

A similar computation shows that

$$
T_2''(x) = \frac{b_2^2}{v_2((x-a_2)^2+b_2^2)^{3/2}} \,,
$$

so that

$$
T''(x) = \frac{b_1^2}{v_1((x-a_1)^2+b_1^2)^{3/2}} + \frac{b_2^2}{v_2((x-a_2)^2+b_2^2)^{3/2}} \,. \qquad (2)
$$

From equation (1) we see that $T'(x) < 0$ if $x \leq a_1$, and that $T'(x) > 0$ if $x \geq a_2$. By the intermediate value theorem, T' must have a root $c \in]a_1, a_2[$.

From (2) we see that $T''(x) > 0$ for all $x \in \mathbb{R}$. Thus T' is increasing, so that it can have at most one root. Hence c is the unique real number with $T'(c) = 0$. We now show that c is a minimum for T. Because T' is strictly increasing, we have $T'(x) < 0$ for $x < c$, and $T'(x) > 0$ for $x > c$. Thus T is strictly decreasing on the interval $] - \infty, c]$ and strictly increasing on the interval $[c, +\infty[$. Thus T has a minimum at c. Finally, c is the only minimum of T, because if d were another minimum, we would have $T'(d) = 0$, contradicting that c is the unique root of T'.

3. Consider the line perpendicular to the x-axis through M, and let P_1, P_2 be the projections of M_1, M_2 on this line. Then

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha_1) &= \frac{|M_1P_1|}{|MM_1|} = \frac{c - a_1}{\sqrt{(x-a_1)^2 + b_1^2}} \\
\sin(\alpha_2) &= \frac{|M_2P_2|}{|MM_2|} = \frac{a_2 - c}{\sqrt{(x-a_2)^2 + b_2^2}} .
\end{aligned}$$

So we want to prove that

$$\frac{c - a_1}{v_1\sqrt{(x-a_1)^2 + b_1^2}} = \frac{a_2 - c}{v_2\sqrt{(x-a_2)^2 + b_2^2}} .$$

By looking at (1), this is equivalent to $T'(c) = 0$.

Exercise 5. 1. Calculons sa dérivée seconde. Nous avons, pour $x \in] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:

$$\begin{aligned}
\tan'(x) &= \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{1}{\cos^2(x)} .
\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\frac{1}{\cos^2(x)} &= \frac{-2}{\cos^3(x)} \cdot \cos'(x) \\
&= \frac{2\sin(x)}{\cos^3(x)} .
\end{aligned}$$

Pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, on a $\sin(x) \geq 0$ et $\cos(x) > 0$, donc $\tan''(x) \geq 0$. Donc $\tan(x)$ est convexe sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.

2. Par un théorème du cours (Théorème 2), si $y = g(x)$ est l'équation de la droite tangente à la courbe représentative de $\tan(x)$ en $x = 0$, la convexité de $\tan(x)$ sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ implique que

$$\tan(x) \geq g(x)$$

pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$. Puisque $\tan'(0) = \frac{1}{\cos^2(0)} = 1$, l'équation de la droite tangente est $y = x$. Donc $\tan(x) \geq x$. Pour la deuxième inégalité, on utilise la définition de convexité. Considérons les deux points $(x_1, y_1) = (0, \tan(0)) = (0, 0)$ et $(x_2, y_2) = (\frac{\pi}{4}, \tan(\frac{\pi}{4})) = (\frac{\pi}{4}, 1)$. Alors si $y = h(x)$ est l'équation de la droite passant par ces points, on a $\tan(x) \leq h(x)$ pour tout $x \in [x_1, x_2]$. L'équation de la droite est

$$y - y_1 = (x - x_1) \cdot \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \iff y = x \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{4}}\,.$$

Donc $\tan(x) \leq \frac{4}{\pi} x$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

Exercise 6. 1. We compute its second derivative. For $x > 0$, we have $\ln'(x) = \frac{1}{x}$, and $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$. Thus $\ln(x)$ is concave on $]0, +\infty[$. By a theorem in the course notes, if $y = f(x)$ is the equation of the tangent line to the graph of $\ln(x)$ at $x = 1$, we have $\ln(x) \leq f(x)$ for all $x > 0$. Because $\ln'(1) = 1$, the equation of the tangent is

$$y - \ln(1) = \ln'(1) \cdot (x - 1) \iff y = x - 1\,.$$

Thus $\ln(x) \leq x - 1$ for all $x > 0$.

2. We have

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 &= \frac{3x_1 + 3x_2 + 3x_3}{x_1 + x_2 + x_3} \\ &= 3\,. \end{aligned}$$

By the first question applied to y_1, y_2, y_3:

$$\begin{aligned} \ln(y_1 y_2 y_3) &= \ln(y_1) + \ln(y_2) + \ln(y_3) \\ &\leq (y_1 - 1) + (y_2 - 1) + (y_3 - 1) \\ &= y_1 + y_2 + y_3 - 3 \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Thus $y_1y_2y_3 \leq 1$. Writing this out, we have

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{3} \frac{3x_i}{x_1+x_2+x_3} &\leq 1 \\ \iff \left(\frac{3}{x_1+x_2+x_3}\right)^3 \prod_{i=1}^{3} x_i &\leq 1 \\ \iff \prod_{i=1}^{3} x_i &\leq \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^3 \\ \iff \sqrt[3]{x_1x_2x_3} &\leq \frac{x_1+x_2+x_3}{3}\,, \end{aligned}$$

which is the AM–GM inequality.

3. Let a, b, c denote the length, width and height of the rectangular cuboid. Then $V = abc$ and $S = 2(ab+bc+ca)$. Applying AM–GM to ab, bc, ca we have

$$\begin{aligned} (ab \cdot bc \cdot ca)^{1/3} &\leq \frac{ab+bc+ca}{3} \\ \iff V^{2/3} &\leq \frac{S}{6} \\ \iff V &\leq \left(\frac{S}{6}\right)^{3/2}. \end{aligned}$$

Exercise 7. 1. Déterminons d'abord le domaine de définition de cette expression. Soit D_0 le domaine de définition de l'expression $\ln(x)$. Alors

$$\begin{aligned} D &= \{x \in \mathbb{R} : x \in D_0,\ \ln(x) \in D_0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x > 0,\ \ln(x) > 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x > 0,\ x > 1\} \\ &=]1, +\infty[\,. \end{aligned}$$

Soit maintenant $g : D \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln(\ln(x))$. Calculons sa dérivée seconde. On a

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{\ln(x)} \cdot \ln'(x) \\ &= \frac{1}{x\ln(x)}\,. \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} g''(x) &= -\frac{1}{(x\ln(x))^2} \cdot \frac{d}{dx}(x\ln(x)) \\ &= -\frac{1}{(x\ln(x))^2} \cdot \left(\ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}\right) \\ &= -\frac{\ln(x)+1}{(x\ln(x))^2}\,. \end{aligned}$$

Car $\ln(x) > 0$ pour $x \in D$, on a $g''(x) < 0$ pour $x \in D$, donc g est concave.

2. En particulier, pour $x, y \in D$ on a

$$\begin{aligned} g\left(\frac{x+y}{2}\right) &\geq \frac{g(x)+g(y)}{2} \\ \iff \ln\left(\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) &\geq \frac{\ln(\ln(x))+\ln(\ln(y))}{2} \\ \iff \ln\left(\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) &\geq \ln(\sqrt{\ln(x)\cdot\ln(y)}) \\ \iff \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) &\geq \sqrt{\ln(x)\cdot\ln(y)}\,, \end{aligned}$$

où pour la dernière équivalence nous avons utilisé que ln est strictement croissante.

Exercise 8. Studying the variation of f means to decompose its domain into intervals where it is strictly increasing, strictly decreasing, or constant, and to determine the local extrema of f. Studying the convexity of f means to decompose its domain into intervals where it is strictly convex, strictly concave, or linear, and to determine its inflection points. (That is, when f is twice differentiable, studying the convexity of f is equivalent to studying the variation of f'.)

We have, for all $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2}\exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

and

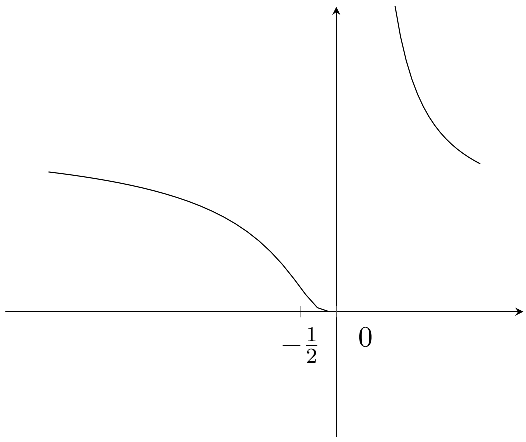
$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(-1)(-2)}{x^3}\exp\left(\frac{1}{x}\right) + \left(\frac{-1}{x^2}\right)^2\exp\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{1+2x}{x^4}\exp\left(\frac{1}{x}\right)\,. \end{aligned}$$

Thus f is strictly decreasing on $\mathbb{R}^*$. We have $f'(x) > 0$ iff $1+2x > 0$, which is equivalent to $x > -\frac{1}{2}$. Thus f is strictly convex on $[-\frac{1}{2}, 0[$ and $]0, +\infty[$, and strictly concave on $]-\infty, -\frac{1}{2}]$. Its only inflexion point is $(-\frac{1}{2}, f(-\frac{1}{2})) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}})$.

To draw the graph of f, we compute some limits:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} e^{1/x} &= \lim_{x\to 0^-} e^x = 1 \\ \lim_{x\to 0^-} e^{1/x} &= \lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x\to 0^+} e^{1/x} &= \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} e^{1/x} &= \lim_{x\to 0^+} e^x = 1\,. \end{aligned}$$

Combining this with the fact that f is strictly decreasing and with what we know about its convexity, it is clear that the graph of f must look like this:



Exercise 9. On a

$$\varphi'(x) = 4 \cdot \arctan(x) + 4x \cdot \frac{1}{1+x^2} - 2x$$

et ensuite

$$\begin{aligned}\varphi''(x) &= \frac{4}{1+x^2} + 4 \cdot \frac{1}{1+x^2} + 4x \cdot \frac{-1}{(1+x^2)^2} \cdot 2x - 2 \\ &= \frac{8(1+x^2) - 8x^2 - 2(1+x^2)^2}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{8 + 8x^2 - 8x^2 - 2 - 4x^2 - 2x^4}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{-2x^4 - 4x^2 + 6}{(1+x^2)^2} \\ &= -2 \cdot \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{(1+x^2)^2} \\ &= -2 \cdot \frac{(x^2+3)(x^2-1)}{(1+x^2)^2}\,.\end{aligned}$$

Donc $\varphi''(x) > 0 \iff x^2 - 1 < 0 \iff x \in]-1, 1[$. Ainsi, φ est strictement convexe sur $]-\infty, -1[$ et $]1, +\infty[$, et strictement concave sur $]-1, 1[$. Ses points d'inflexion sont $(1, \varphi(1))$ et $(-1, \varphi(-1))$, où

$$\begin{aligned}\varphi(1) &= 4 \cdot \frac{\pi}{4} - 1 = \pi - 1 \\ \varphi(-1) &= 4 \cdot (-1)\frac{-\pi}{4} - 1 = \pi - 1\,.\end{aligned}$$

Exercise 10. For $x > 0$ and $\alpha \in \mathbb{R}$, we have

$$\begin{aligned} f'_\alpha(x) &= \alpha x^{\alpha-1}\ln(x) + x^\alpha \cdot \frac{1}{x} \\ &= x^{\alpha-1}(\alpha\ln(x)+1)\,, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} f''_\alpha(x) &= (\alpha-1)x^{\alpha-2}(\alpha\ln(x)+1) + x^{\alpha-1}\cdot\frac{\alpha}{x} \\ &= x^{\alpha-2}(\alpha(\alpha-1)\ln(x)+2\alpha-1)\,. \end{aligned}$$

Because $x^{\alpha-2} > 0$, $f''_\alpha(x)$ and $\alpha(\alpha-1)\ln(x)+2\alpha-1$ have the same sign.

If $\alpha = 0$, we have $\alpha(\alpha-1)\ln(x)+2\alpha-1 = -1$, so that f is strictly concave and has no inflection points.

If $\alpha = 1$, we have $\alpha(\alpha-1)\ln(x)+2\alpha-1 = 1$, so that f is strictly convex and has no inflection points.

If $\alpha \in\,]0,1[$ so that $\alpha(\alpha-1) < 0$, then $f''_\alpha(x) > 0$ is equivalent to

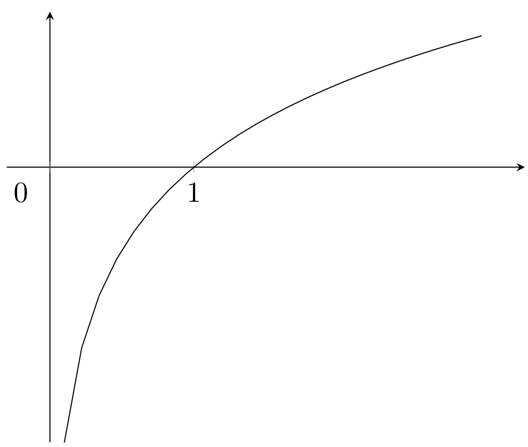
$$\begin{aligned} &\ln(x) < -\frac{2\alpha-1}{\alpha(\alpha-1)} \\ \iff\ & x < \exp\left(-\frac{2\alpha-1}{\alpha(\alpha-1)}\right) \end{aligned}$$

(because ln is strictly increasing). We see that f''_α changes sign exactly once, so that f_α has a unique inflection point, with coordinates

$$\left(\exp\left(-\frac{2\alpha-1}{\alpha(\alpha-1)}\right), -\frac{2\alpha-1}{\alpha(\alpha-1)}\cdot\exp\left(-\frac{2\alpha-1}{\alpha-1}\right)\right)\,.$$

We also see that f_α is first convex and then concave. If $\alpha \in\,]-\infty,0[\,\cup\,]1,+\infty[$, then the inflection point is still given by the above formula, but f_α is first concave and then convex.

Let's draw f_α for some values of α. When $\alpha = 0$, it is just the logarithm (strictly concave):



Let's compute some limits to get an idea with it looks like for other values of α. When $\alpha < 0$, we have

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \ln(x) = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty\,.$$

When $\alpha > 0$, using L'Hôpital's rule, we have

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \ln(x) &= \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{x^{-\alpha}} \\
&= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} \\
&= \lim_{x \to 0^+} -\frac{x^\alpha}{\alpha} \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

For the limit at $+\infty$, we have for $\alpha > 0$ that

$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha \ln(x) = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty\,,$$

and for $\alpha < 0$ using L'Hôpital:

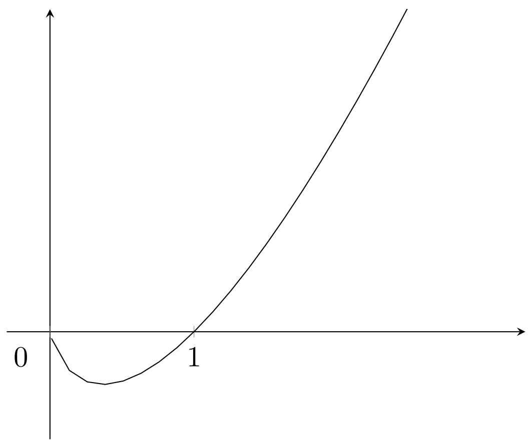
$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} x^\alpha \ln(x) &= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^{-\alpha}} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} \\
&= \lim_{x \to 0^+} -\frac{x^\alpha}{\alpha} \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Suppose $\alpha > 0$. Because $f'_\alpha(x) > 0$ iff $\ln(x) > -\frac{1}{\alpha}$, we see that f_α is strictly decreasing on $]0, e^{-1/\alpha}]$ and strictly increasing on $[e^{-1/\alpha}, +\infty[$. It has a minimum at $x = e^{-1/\alpha}$ with value $-\frac{1}{e\alpha}$. It lies to the left of 1.

For $\alpha < 0$, f_α has a maximum at $e^{-1/\alpha}$ with value $-\frac{1}{e\alpha} > 0$. It lies to the right of 1.

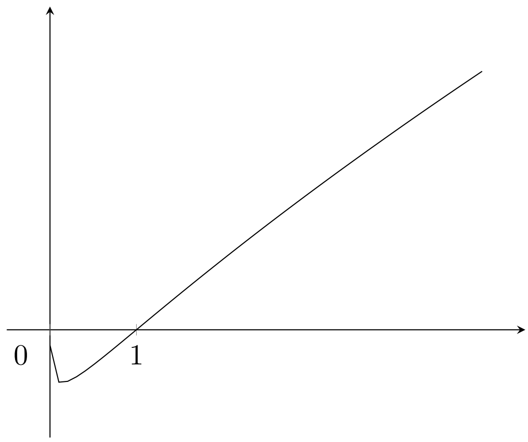
So for $\alpha = 1$, the graph looks like (strictly convex, with limits 0 at 0 and $+\infty$ at

$+\infty$):

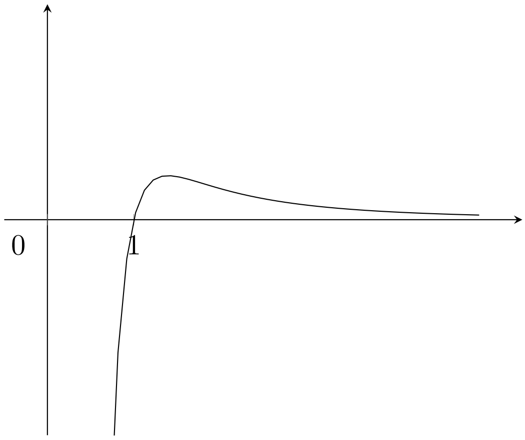


For $\alpha \neq 0, 1$, we also need to know where the inflection point lies relative to the minimum and the point 1 (where f_α changes sign). Because a concave function lies below its tangent lines, the minimum of f_α must lie in the interval where f is convex. From the formula for the inflection point, we see that the inflection point is to the right of 1 iff $-\alpha(\alpha - \frac{1}{2})(\alpha - 1) > 0$. That is, it is to the left of 1 when $\alpha \in]1, +\infty[\cup]0, \frac{1}{2}[$ (all three factors positive or only the first factor positive), and to the right of 1 when $\alpha \in] - \infty, 0[\cup]\frac{1}{2}, 1[$ (all factors negative or only the first two factors positive) and at 1 when $\alpha = \frac{1}{2}$.

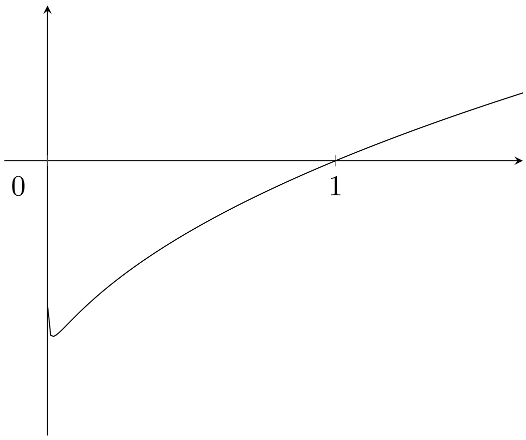
Thus for $\alpha = \frac{1}{2}$ it looks like (limits 0 and $+\infty$, minimum to the left of 1 and negative, first convex then concave, inflection point at 1):



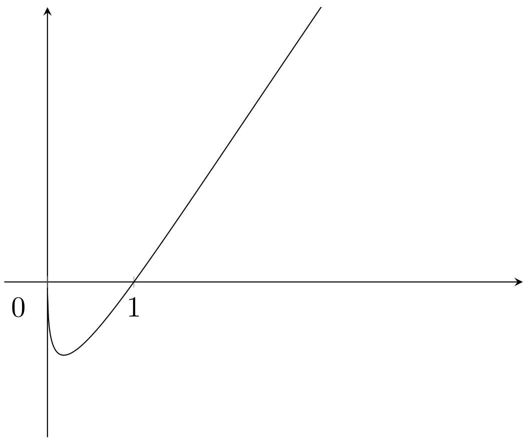
For $\alpha \in] - \infty, 0[$ (limits $-\infty$ and 0, maximum to the right of 1, inflection point to the right of 1, first concave then convex):



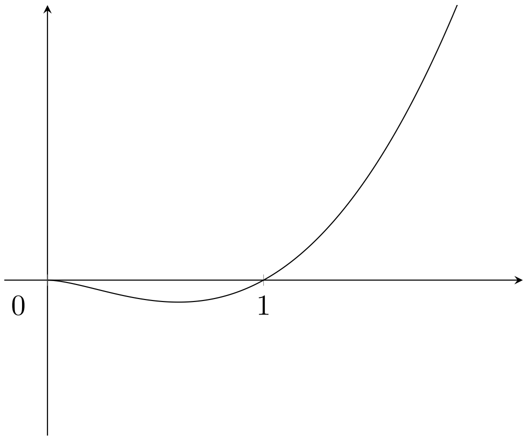
For $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$ (limits 0 and $+\infty$, minimum to the left of 1, inflection point to the left of 1, first convex then concave):



For $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$ (limits 0 and $+\infty$, minimum to the left of 1, inflection point to the right of 1, first convex then concave):



For $\alpha \in]1, +\infty[$ (limits 0 and $+\infty$, minimum to the left of 1, inflection point to the left of 1, first concave then convex):



Exercise 11. La dérivée de $\ln(x)$ est x^{-1} (pour $x > 0$). Cette fonction est infiniment différentiable. En effet, les fonctions du type x^α ($\alpha \in \mathbb{R}$) sont toutes infiniment différentiables sur $]0, +\infty[$. C'est car $\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$: la dérivée d'une fonction du type x^α est de nouveau de ce type, à un facteur constant près.

Calculons $\ln^{(n)}(x)$ pour tout $n > 0$. Pour $n = 1$, on trouve $\ln^{(1)}(x) = x^{-1}$. Nous avons vu en cours que

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^\alpha) = x^{\alpha-n} \cdot \prod_{k=0}^{n-1}(\alpha - k)\,,$$

pour tout $n \geq 0$ (où par convention le produit vaut 1 si $n = 0$). Donc, pour $n > 0$, on a

$$\begin{aligned} \ln^{(n)}(x) &= \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^{-1}) \\ &= x^{-1-(n-1)} \prod_{k=0}^{n-2}(-1-k) \\ &= x^{-n} \cdot (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \end{aligned}$$

(où par convention $0! = 1$).

Au lieu de faire appel au résultat général sur les dérivées des fonctions du type x^α, on aurait pu aussi montrer directement par récurrence que

$$\ln^{(n)}(x) = x^{-n} \cdot (-1)^{n-1} \cdot (n-1)!$$

pour $n \geq 1$. Faisons-le comme réchauffement, parce que dans les exercices suivantes on sera forcé de faire des démonstrations par récurrence. Pour $n = 1$, la formule dit

$\ln'(x) = x^{-1}$, ce qui est vrai. Supposons que la formule est vraie pour un certain $n \geq 1$, et montrons la avec n remplacé par $n+1$. On a

$$\begin{aligned}
\ln^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx}\ln^{(n)}(x) \\
&= \frac{d}{dx}\left(x^{-n}\cdot(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\right) \\
&= -n\cdot x^{-n-1}\cdot(-1)^{n-1}\cdot(n-1)! \\
&= x^{-(n+1)}(-1)^{n}(n-1)!\cdot n \\
&= x^{-(n+1)}(-1)^{(n+1)-1}((n+1)-1)!\,,
\end{aligned}$$

comme voulu. On conclut que la formule est vraie pour tout $n \geq 1$.

Exercise 12. For $n = 0$, we have $\sin^{(0)}(x) = \sin(x) = \sin(x+0\cdot\frac{\pi}{2})$, so the formula holds. For $n = 1$, we have $\sin^{(1)}(x) = \cos(x) = \sin(x+1\cdot\frac{\pi}{2})$, so it holds again. We proceed by strong induction on n. Assume that $n \geq 1$ is such that $\sin^{(k)}(x) = \sin(x+k\cdot\frac{\pi}{2})$ for all $x \in \mathbb{R}$ and $k \leq n$. We show that the same is true for $k = n+1$. By applying the case $k = n$, we have

$$\begin{aligned}
\sin^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx}\sin^{(n)}(x) \\
&= \frac{d}{dx}\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})\,.
\end{aligned}$$

By the chain rule and by applying the case $k = 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2}) &= \sin^{(1)}(x+n\cdot\frac{\pi}{2})\cdot\frac{d}{dx}\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})\cdot 1 \\
&= \sin(x+(n+1)\cdot\frac{\pi}{2})\,,
\end{aligned}$$

as desired.

Exercise 13. Justifions que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On a vu dans le cours que e^x est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et que les fonctions polynomiales sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Le produit de deux fonctions de classe C^∞ (sur un intervalle ouvert) est encore de classe C^∞, donc $g(x) = x^2e^x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Pour calculer $g^{(n)}$ pour tout $n \geq 0$, calculons d'abord $g', g'', g''', g^{(4)}$, et essayons de deviner une formule générale qu'on montrera par récurrence. On a

$$\begin{aligned}
g'(x) &= 2xe^x + x^2e^x \\
&= (0 + 2x + x^2)e^x \\
g''(x) &= (2 + 2x)e^x + (2x + x^2)e^x \\
&= (2 + 4x + x^2)e^x \\
g'''(x) &= (4 + 2x)e^x + (2 + 4x + x^2)e^x \\
&= (6 + 6x + x^2)e^x \\
g^{(4)}(x) &= (6 + 2x)e^x + (6 + 6x + x^2)e^x \\
&= (12 + 8x + x^2)e^x \,.
\end{aligned}$$

Il semble que la dérivée n-ième est toujours de la forme $(P(x) + x^2)e^x$, avec $P(x)$ un polynome de degré 1. Il semble que le coefficient de xe^x augmente de 2 en dérivant. C'est-à-dire, que ce coefficient vaut $2n$. Que vaut le coefficient de e^x? Écrivons

$$g^{(n)}(x) = (a_n + b_nx + x^2)e^x \,.$$

(Attention, nous n'avons pour l'instant pas demontré que $g^{(n)}$ est de cette forme! Mais admettons-le pour l'instant; le but est d'obtenir des intuitions: tout ces calculs préliminaires sont du brouillon, et ne feront pas partie de la démonstration finale.)

Comme $g^{(0)}(x) = x^2e^x$, on a alors $a_0 = b_0 = 0$. On s'est plus ou moins convaincu que $b_n = 2n$ pour tout n. Quel est la relation entre a_n et a_{n+1}? En dérivant, on trouve

$$\begin{aligned}
g^{(n+1)}(x) &= (b_n + 2x)e^x + (a_n + b_nx + x^2)e^x \\
&= ((a_n + b_n) + (b_n + 2)x + x^2)e^x \,.
\end{aligned}$$

Donc il faudrait que $a_{n+1} = a_n + b_n = a_n + 2n$. C'est à dire, que

$$\begin{aligned}
a_n &= a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} 2k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} 2k \\
&= 2 \cdot \frac{(n-1)\cdot n}{2} \\
&= (n-1)\cdot n \,,
\end{aligned}$$

pour tout $n \geq 0$. Voilà notre conjecture! (Fin du brouillon.)

Montrons par récurrence que

$$g^{(n)}(x) = ((n-1)n + 2nx + x^2)e^x$$

pour tout $n \geq 0$. Pour $n = 0$, c'est vrai. Suppons la formule vraie pour n, et montrons la avec n remplacé par $n+1$. On a

$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx}\left(((n-1)n + 2nx + x^2)e^x\right) \\ &= (2n+2x)e^x + ((n-1)n + 2nx + x^2)e^x \\ &= \left((n-1+2)\cdot n + (2n+2)x + x^2\right)e^x \\ &= \left(n(n+1) + 2(n+1)x + x^2\right)e^x\,, \end{aligned}$$

comme voulu.

Exercise 14. 1. We have seen that when f is of class C^∞ (on an open interval I) and $f(x) \neq 0$ for all $x \in I$, then $\frac{1}{f}$ is of class C^∞ on I. Because $1+x^2$ is a polynomial function, it is of class C^∞ on $\mathbb{R}$. We have $1+x^2 \geq 1 > 0$ for all $x \in \mathbb{R}$, so that $1+x^2 \neq 0$. Hence $\frac{1}{1+x^2}$ is of class C^∞ on $\mathbb{R}$.

2. (a) Let's write f, f', f'' in the form $\frac{Q(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$ for a polynomial function $Q(x)$. We have

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{Q_0(x)}{1+x^2}\,,$$

if we define $Q_0(x) = 1$. This shows (P_0). Using the quotient rule, we find

$$f'(x) = \frac{-\frac{d}{dx}(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{Q_1(x)}{1+x^2}\,,$$

if we define $Q_1(x) = -2x$. This shows (P_1). Using the product rule,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx}(-2x)\cdot\frac{1}{(1+x^2)^2} + (-2x)\cdot\frac{-2\frac{d}{dx}(1+x^2)}{(1+x^2)^3} \\ &= \frac{-2}{(1+x^2)^2} + 4x\cdot\frac{2x}{(1+x^2)^3} \\ &= \frac{Q_2(x)}{(1+x^2)^3}\,, \end{aligned}$$

if we define $Q_2(x) = -2(1+x^2) + 8x^2$. (No need to simplify if it isn't asked.) This shows (P_2).

(b) (This has nothing to do with part (c); it is just a regular exercise on convexity.) We have

$$f''(x) = \frac{Q_2(x)}{(1+x^2)^3} = \frac{-2+6x^2}{(1+x^2)^3}\,.$$

Hence $f''(x) > 0 \iff 6x^2 - 2 > 0 \iff x^2 > \frac{1}{3}$. This is equivalent to $x \in \,]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}[\, \cup \,]\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty[$. Thus f is strictly convex on $]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}[\, \cup \,]\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty[$, strictly concave on $]-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}[$ and its inflection points are

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{1+\frac{1}{3}}\right), \quad \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{1+\frac{1}{3}}\right)\,.$$

(c) We have shown that (P_0) is true. Assume that (P_n) is true. Let's compute $f^{(n+1)}$. Using the product rule, we have

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx}\left(Q_n(x)\cdot\frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\right) \\ &= Q_n'(x)\cdot\frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} + Q_n(x)\cdot\frac{-(n+1)\frac{d}{dx}(1+x^2)}{(1+x^2)^{n+2}} \\ &= \frac{Q_n'(x)\cdot(1+x^2)}{(1+x^2)^{n+2}} + \frac{-2(n+1)x\cdot Q_n(x)}{(1+x^2)^{n+2}} \\ &= \frac{Q_{n+1}(x)}{(1+x^2)^{n+2}}\,, \end{aligned}$$

if we define $Q_{n+1}(x) = Q_n'(x)\cdot(1+x^2) - 2(n+1)x\cdot Q_n(x)$. The derivative of a polynomial function is again a polynomial function, so that $Q_n'(x)$ is a polynomial function, and hence $Q_{n+1}(x)$ is a polynomial function. This proves (P_{n+1}), and the induction is complete. In addition, we have found an expression for Q_{n+1} in terms of Q_n.

Exercise 15. 1. La fonction φ est dérivable sur $]0,+\infty[$ car c'est une fonction constante sur un intervalle ouvert. Elle est dérivable sur $]-\infty,0[$ car sur cet intervalle c'est une composition de fonctions dérivables. Pour la dérivabilité en 0, calculons les dérivées à gauche et à droite:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0^+}\frac{\varphi(t)}{t} &= \lim_{t\to 0^+} 0 \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

À gauche:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0^-}\frac{\varphi(t)}{t} &= \lim_{t\to 0^-}\frac{e^{1/t}}{t} \\ &= \lim_{u\to-\infty} ue^u \qquad (t=1/u) \\ &= \lim_{u\to-\infty}\frac{u}{e^{-u}} \end{aligned}$$

(où les égalités sont valables si une des limites existe). Par L'Hôpital, la dernière limite vaut

$$\lim_{u\to-\infty}\frac{1}{-e^{-u}} = 0\,.$$

Donc φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = 0$.

2. On a φ est C^∞ sur $]0,+\infty[$ car c'est une fonction polynomiale (même constante) sur cet intervalle ouvert. Elle est de classe C^∞ sur $]-\infty,0[$ car c'est une composition de fonctions C^∞. Donc φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.

Appelons (Q_n) la proposition: "Il existe une fonction polynomiale P_n tel que $\varphi^{(n)}(t) = t^{-2n}P_n(t)e^{1/t}$ pour tout $t < 0$." Montrons que (Q_n) est vraie pour tout $n \geq 0$, par récurrence. Pour $n = 0$, on a $\varphi^{(0)}(t) = \varphi(t) = e^{1/t}$, donc on peut prendre $P_0(t) = 1$.

Supposeons que (Q_n) est vraie, et montrons (Q_{n+1}). Écrivons donc $\varphi^{(n)}(t) = t^{-2n}P_n(t)e^{1/t}$, pour $t < 0$. En dérivant, on trouve pour $t < 0$:

$$\begin{aligned}
\varphi^{(n+1)}(t) &= \frac{d}{dt}\varphi^{(n)}(t) \\
&= \frac{d}{dt}\left(t^{-2n}P_n(t)e^{1/t}\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(t^{-2n}\right)\cdot P_n(t)e^{1/t} + t^{-2n}\frac{d}{dt}\left(P_n(t)\right)\cdot e^{1/t} + t^{-2n}P_n(t)\frac{d}{dt}\left(e^{1/t}\right) \\
&= -2nt^{-2n-1}P_n(t)e^{1/t} + t^{-2n}P_n'(t)e^{1/t} + t^{-2n}P_n(t)\frac{-1}{t^2}e^{1/t} \\
&= t^{-2n-2}e^{1/t}\left(-2ntP_n(t) + t^2P_n'(t) - P_n(t)\right)\,.
\end{aligned}$$

On peut donc prendre $P_{n+1}(t) = -2ntP_n(t) + t^2P_n'(t) - P_n(t)$, ce qui est une fonction polynomiale car $P_n(t)$ l'est.

3. Pour $m \leq 0$, on a que $\frac{1}{t^m}$ reste borné au voisinage de 0 (car c'est une fonction qui s'étend à une fonction continue définie sur $\mathbb{R}$), et $\lim_{t\to 0^-} e^{1/t} = \lim_{u\to-\infty} e^u = 0$. En multipliant par la fonction bornée $\frac{1}{t^m}$, on trouve:

$$\lim_{t\to 0^-}\frac{1}{t^m}e^{1/t} = 0\,.$$

Montrons par récurrence que pour $m \geq 0$, la limite vaut aussi 0. Pour $m = 0$, on vient de le démontrer. Supposons que $m \geq 0$ est tel que $\lim_{t\to 0^-}\frac{1}{t^m}e^{1/t} = 0$. Montrons que ça reste vrai avec m remplacé par $m + 1$. On a

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0^-}\frac{e^{1/t}}{t^{m+1}} &= \lim_{u\to-\infty} u^{m+1}e^u \qquad (t = 1/u) \\
&= \lim_{u\to-\infty}\frac{u^{m+1}}{e^{-u}}
\end{aligned}$$

(où les égalités sont valables si une des limites existe). Par L'Hôpital, la dernière limite vaut

$$\begin{aligned}
&\lim_{u\to-\infty}\frac{(m+1)u^m}{-e^{-u}} \\
&= -(m+1)\lim_{u\to-\infty}\frac{u^m}{e^{-u}} \\
&= -(m+1)\lim_{t\to 0^-}\frac{e^{1/t}}{t^m} \qquad (u = 1/t)\,.
\end{aligned}$$

Par l'hypothèse de récurrence, la dernière limite existe et vaut 0. Donc la limite de départ existe et vaut 0. Ceci démontre l'assertion par récurrence.

Montrons maintenant par récurrence que φ est n fois dérivable en 0 et que $\varphi^{(n)}(0) = 0$. Pour $n = 0$ (et même $n = 1$), on l'a déjà fait. Supposons que c'est vrai pour un entier $n \geq 1$. (L'étape de récurrence sera similaire à la première partie de cet exercice.) Montrons que φ est $n+1$ fois dérivable en 0 et que $\varphi^{(n+1)}(0) = 0$. Calculons la limite

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\varphi^{(n)}(t) - \varphi^{(n)}(0)}{t - 0}.$$

Comme φ est une fonction constante sur $]0, +\infty[$ et $n \geq 1$, on a $\varphi^{(n)}(t) = 0$ pour tout $t > 0$. Par l'hypothèse de récurrence, on a aussi $\varphi^{(n)}(0) = 0$. Donc la limite vaut

$$\lim_{t \to 0^+} 0 = 0.$$

Pour la limite à gauche, on a:

$$\lim_{t \to 0^-} \frac{\varphi^{(n)}(t) - \varphi^{(n)}(0)}{t - 0} = \lim_{t \to 0^-} \frac{t^{-2n} P_n(t) e^{1/t}}{t}.$$

(Si la limite existe.) Car P_n est une fonction polynomiale, on peut écrire

$$\frac{t^{-2n} P_n(t)}{t} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m \frac{e^{1/t}}{t^m},$$

pour certains nombres réels a_m qui sont nuls sauf pour un nombre fini de $m \in \mathbb{Z}$. On a alors

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0^-} \frac{t^{-2n} P_n(t) e^{1/t}}{t} &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m \lim_{t \to 0^-} \frac{e^{1/t}}{t^m} \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m \cdot 0, \end{aligned}$$

car toutes ces limites valent 0. (Ici la somme est vraiment une somme finie; tous les termes sauf un nombre fini sont 0.)

Comme φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$, et qu'elle est n fois dérivable en 0 pour tout $n \geq 0$, on a montré que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. (Contrairement à la fonction h de l'exercice 3, malgré que les graphes de h et φ se ressemblent!)

Exercise 16. 1. By convention, in this exercise we define $0^0 := 1$. We proceed by induction on n. For $n = 0$, we have $(a + b)^0 = 1$. The sum equals

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1 \cdot 1 \cdot 1.$$

(Recall: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ and $0! = 1$.) This shows the base case. For the inductive step, suppose that the formula holds for some $n \geq 0$ and for all $a, b \in \mathbb{R}$. Multiplying both sides by $(a + b)$, we have

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1}\,.
\end{aligned}$$

In the first sum, rename the index by substituting $k = \ell - 1$, and in the second sum set $k = \ell$, to get

$$= \sum_{\ell=1}^{n+1}\binom{n}{\ell-1}a^{\ell}b^{n+1-\ell} + \sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}a^{\ell}b^{n-\ell+1}\,.$$

By convention, define $\binom{n}{k} = 0$ if $k < 0$ or $k > n$. Then we may extend the sums to run from 0 to $n + 1$:

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\ell=0}^{n+1}\binom{n}{\ell-1}a^{\ell}b^{n+1-\ell} + \sum_{\ell=0}^{n+1}\binom{n}{\ell}a^{\ell}b^{n-\ell+1} \\
&= \sum_{\ell=0}^{n+1}\left(\binom{n}{\ell-1} + \binom{n}{\ell}\right)a^{\ell}b^{n+1-\ell}\,,
\end{aligned}$$

because the terms we added are 0. Now use Pascal's identity

$$\binom{n}{\ell} + \binom{n}{\ell-1} = \binom{n+1}{\ell}$$

to get

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{\ell=0}^{n+1}\binom{n+1}{\ell}a^{\ell}b^{n+1-\ell}\,.$$

This completes the induction.

2. Setting $a = 1$ and $b = -1$, we find, for $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
0 &= (1+(-1))^n \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k(-1)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\,.
\end{aligned}$$

3. Suppose $n \geq 1$ (for $n = 0$ there is nothing to compute). Then, because f is a product of the C^∞ functions x^{n-1} and $\ln(x)$, for all $x > 0$ we have

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^k}{dx^k}(x^{n-1}) \cdot \ln^{(n-k)}(x)\,.$$

For $k < n$, we have

$$\ln^{(n-k)}(x) = (-1)^{n-k-1} \cdot (n-k-1)! \cdot x^{-(n-k)}\,,$$

by exercise 11. We also have, for all $k \in \{0, \ldots, n\}$ that

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dx^k}(x^{n-1}) &= (n-1)\cdots(n-1-k+1)x^{n-1-k} \\ &= k!\binom{n-1}{k}x^{n-1-k}\,. \end{aligned}$$

Plugging in these two expressions, we have

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= 0 + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{d^k}{dx^k}(x^{n-1}) \cdot \ln^{(n-k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} k! \binom{n-1}{k} x^{n-1-k} \cdot (-1)^{n-k-1} \cdot (n-k-1)! \cdot x^{-(n-k)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} k! \binom{n-1}{k} x^{-1} \cdot (-1)^{n-k-1} \cdot (n-k-1)! \end{aligned}$$

where we have used that the nth derivative of x^{n-1} is 0, so that the term for $k = n$ is zero. Plugging in the definition of the second binomial coefficient, we find

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} k! \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} x^{-1} \cdot (-1)^{n-k-1} \cdot (n-k-1)! \\ &= \frac{-(n-1)!}{x} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \cdot (-1)^{n-k} \\ &= \frac{-(n-1)!}{x} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} - \binom{n}{n} (-1)^{n-n} \right) \\ &= \frac{-(n-1)!}{x} \left(0 - \binom{n}{n} (-1)^{n-n} \right) \\ &= \frac{(n-1)!}{x}\,. \end{aligned}$$

Exercise 17. Montrons-le par récurrence sur n. Pour $n = 0$, il n'y a rien à démontrer: l'assertion dit que si f s'annule en au moins 1 point de I, alors $f^{(0)} = f$ s'annule en au moins un point de I.

Supposons que pour un certain entier $n \geq 0$, l'assertion est vraie pour toute fonction f qui est n fois dérivable. Soit maintenant f une fonction sur I qui est $n + 1$ fois dérivable, et $a_1, \ldots, a_{n+1}$ des points différents où f s'annule, avec $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+1}$. Comme f est dérivable sur I (c'est car $n + 1 \geq 1$), par le théorème de Rolle, la dérivée de f s'annule au moins une fois sur chaque intervalle ouvert $]a_k, a_{k+1}[$ pour $k \in \{1, \ldots, n\}$. Donc f' s'annule en au moins n points distincts de I. Comme f est $n + 1$ fois dérivable, f' est n fois dérivable. Par l'hypothèse de récurrence, on sait que $(f')^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur I. Or, $(f')^{(n)} = f^{(n+1)}$, donc $f^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois sur I. Ceci conclut l'étape d'hérédité.